مثال :

أوجد نشر لوران للدالة : $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$ في النطاق

$0 < |z| < 1$ حيث :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz$$

الحل :

مركز النشر هو النقطة $z_0 = 0$ فنخط حول هذه النقطة بدائرة C_2 نصف قطرها r_2 صغير بقدر كافٍ : $0 < r_2$ كما نخط $z_0 = 0$ بدائرة C_1 نصف قطرها r_1 بحيث أن $0 < r_2 < r_1$

أصبحت الدالة المعطاة تحليلية على C_1 و C_2 في النقاط الواقعة ضمن النطاق الحلقي الواقع بينهما عندئذٍ عند أي نقطة من هذا النطاق الحلقي سيكون للدالة :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad 0 < |z|$$

لنعين المعاملات :

* $$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\frac{e^z - 1}{z^2}}{z^0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^z - 1}{z^2} dz$$

وحسب تكامل صيغ كوشي : $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{h(z)}{(z-0)^2} dz = \frac{h'(z)}{1!}$

$$= \frac{(e^z - 1)'}{1!} \Big|_{z=0} = e^z \Big|_{z=0} = 1$$

* $$b_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\frac{e^z - 1}{z^2}}{z^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^z - 1}{z} dz = e^z - 1 \Big|_{z=0} = 0$$

* $$b_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\frac{e^z - 1}{z^2}}{z^{-2}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} (e^z - 1) dz = 0$$

لأنه تكامل دالة تحليلية .

* $$b_4 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\frac{e^z - 1}{z^2}}{z^{-3}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} z(e^z - 1) dz = 0$$

لأن الدالة تحليلية .

نستنتج أن $b_4 = b_5 = b_6 = \dots = 0$

$$\star\ a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{e^z-1}{z^2}}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{e^z-1}{z^3}\,dz$$

← ?+1 القيمة النهائية

حسب صيغة تكامل كوشي للمشتقة :

$$\frac{(e^z-1)''}{2!}\Big|_{z=0} = \frac{e^z}{2}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}$$

$$\star\ a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{e^z-1}{z^2}}{z^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{e^z-1}{z^4}\,dz = \frac{(e^z-1)'''}{3!} = \frac{1}{3!}$$

+1 ← قوة النهاية

$$\star\ a_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\frac{e^z-1}{z^2}}{z^3}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{e^z-1}{z^5}\,dz = \frac{(e^z-1)^{(4)}}{4!} = \frac{1}{4!}$$

عندئذٍ يكون

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 + \frac{1}{5!}z^3 + \dots + \frac{1}{(n+2)!}z^n + \dots + \frac{1}{z}\, b_1$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n \quad , \quad 0<|z|$$

$$f(z) = \frac{e^z-1}{z^2}$$

"طريقة ثانية للحل"

حسب نشر لورانت لدينا المنشور الشهير :

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots$$

$$e^z - 1 = z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots \quad (|z|<\infty)$$

حسب لورانت ونستثني النقطة الشاذة :

$$\frac{1}{z^2}(e^z-1) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}z + \dots + \frac{1}{n!}z^{n-2} + \dots$$

$$(0<|z|<\infty)\ ;$$

مثال :

أوجد نشر لورانت للدالة $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

بحيث $0<|z|$

الحل :

Subject : .... / /

$0 < |z|$

مركز النشر $(z_0 = 0)$ نحيط مركز النشر بدائرتين منطقة ، الأولى C_1 نصف قطرها r_2 صغير بشكل كافٍ بحيث $0 < r_2$ كما نحيط $(z_0 = 0)$ بدائرة C_1 نصف قطرها r_1 نصف قطرها صغير بشكل كافٍ، بحيث أن $(0 < r_2 < r_1)$ عندئذٍ يكون للدالة f التمثيل الآتي :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad ; \quad 0 < |z| < \infty$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} \, dz \quad ; n = 1, 2, \dots$$

* $$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\frac{\sin z}{z}}{1} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\sin z}{z} \, dz = [\sin z]_{z=0} = 0$$

* $$b_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\frac{\sin z}{z}}{\frac{1}{z}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \sin z \, dz = 0$$

$z^{-1} \leftarrow \frac{1}{z}$

نستنتج أن $b_2 = b_3 = b_4 = \dots = b_n = 0$

نحسب a_n من خلال $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{\frac{\sin z}{z}}{z^{n+1}} \, dz$

طريقة ثانية للحل :

نعلم أن :

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty)$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 - \frac{1}{7!} z^6 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{(2n+1)!} \dots$$

$(0 < |z| < \infty)$

بعض الخواص الآتية للمتسلسلات :

1- لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ حيث (1) « $z_n = x_n + i y_n$ » ولنفرض أنها متقاربة، عندئذٍ تكون :

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)$ ، $\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)$ كل منهما متسلسلة متقاربة، استناداً إلى مبرهنة من محاضرة سابقة ،

Subject : / /

ونعلم بأنّ الشرط اللازم لتقارب متسلسلة أعداد حقيقية هو أن يسعى الحد العام إلى الصفر أي أنّ :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

من هذا نعرف بأنّ الشرط اللازم لتقارب المتسلسلة $z_n = x_n + iy_n$ هو $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ وهذا يعني بلغة (ε) انه مهما كان (ε>0) يوجد عدد طبيعي (N_ε) بحيث أنّ $[|z_n - 0| < \varepsilon]$ طالما أنّ " $n < N_\varepsilon$ " (1)

وهذا يعني أنّ المتسلسلة المتقاربة هي محدودة أي أنه يوجد M بحيث أنّ $|z_n| < M$

التقارب بإطلاق :

نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ أنها متسلسلة متقاربة بإطلاق إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \sum \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ ، ولكن نعلم أنّ $|Re\, z_n| \leq |z|$

$|Im\, z| \leq |z|$ أي أنّ

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \qquad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

وحسب اختبار المقارنة يكون $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ و $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|$ متسلسلتين متقاربتين

مما يعني أنّ $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ متسلسلتين متقاربتين بإطلاق

وهذا يعني بدوره أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ هي متسلسلة متقاربة

أي نخلص إلى النتيجة الآتية :

" كل متسلسلة متقاربة بإطلاق في الساحة العقدية هي أيضاً متسلسلة متقاربة "

مبرهنة :

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة عند $(z_1 \neq 0)$ عندئذٍ تكون هذه المتسلسلة متقاربة عند كل نقطة z بحيث $|z| < |z_1|$ أي النقاط التي تقع في داخلية التي مركزها z_0 ونصف قطرها z_1 .

الإثبات :

بما أن المتسلسلة متقاربة عند z_1 هذا يعني أنّ المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_1^n$ متقاربة

Subject : / /

وهذا يعني بدوره أنّ هذه المتسلسلة محدودة، أي يوجد M حيث أنّ:

$$|a_n z_1^n| < M.$$

من أجل $|z| < |z_1| \Leftarrow \frac{|z|}{|z_1|} < 1$ لنضع $\frac{|z|}{|z_1|} = K$

عندئذٍ يكون $(0 < K < 1)$

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n \frac{z^n}{z_1^n}| = |a_n z_1^n| \cdot \left(\frac{|z|}{|z_1|}\right)^n < MK^n$$

وحسب اختبار المقارنة وكون المتسلسلة $M\sum_{n=0}^{\infty} K^n$ هي متسلسلة هندسية متقاربة لأنّ $(K<1)$ عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ متقاربة أي أنّ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ هي متسلسلة متقاربة بالإطلاق ونعلم بأن كل متسلسلة متقاربة بالإطلاق هي متسلسلة متقاربة.

ملاحظة:

المبرهنة السابقة تقضي بأنّ متسلسلة القوى المذكورة في نص المبرهنة هي متسلسلة متقاربة عند كل نقطة z تحقق المتراجحة "$|z| < |z_1|$"، وهذا يعني بدوره أنّها متقاربة في داخلية الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي $|z_1|$

ملاحظة:

أكبر دائرة مركزها نقطة الأصل تكون متسلسلة القوى "المذكورة في نص المبرهنة" متقاربة عند كل نقطة من نقاط داخليتها ندعوها دائرة التقارب وخارج دائرة التقارب تكون متسلسلة القوى متباعدة.

الإثبات:

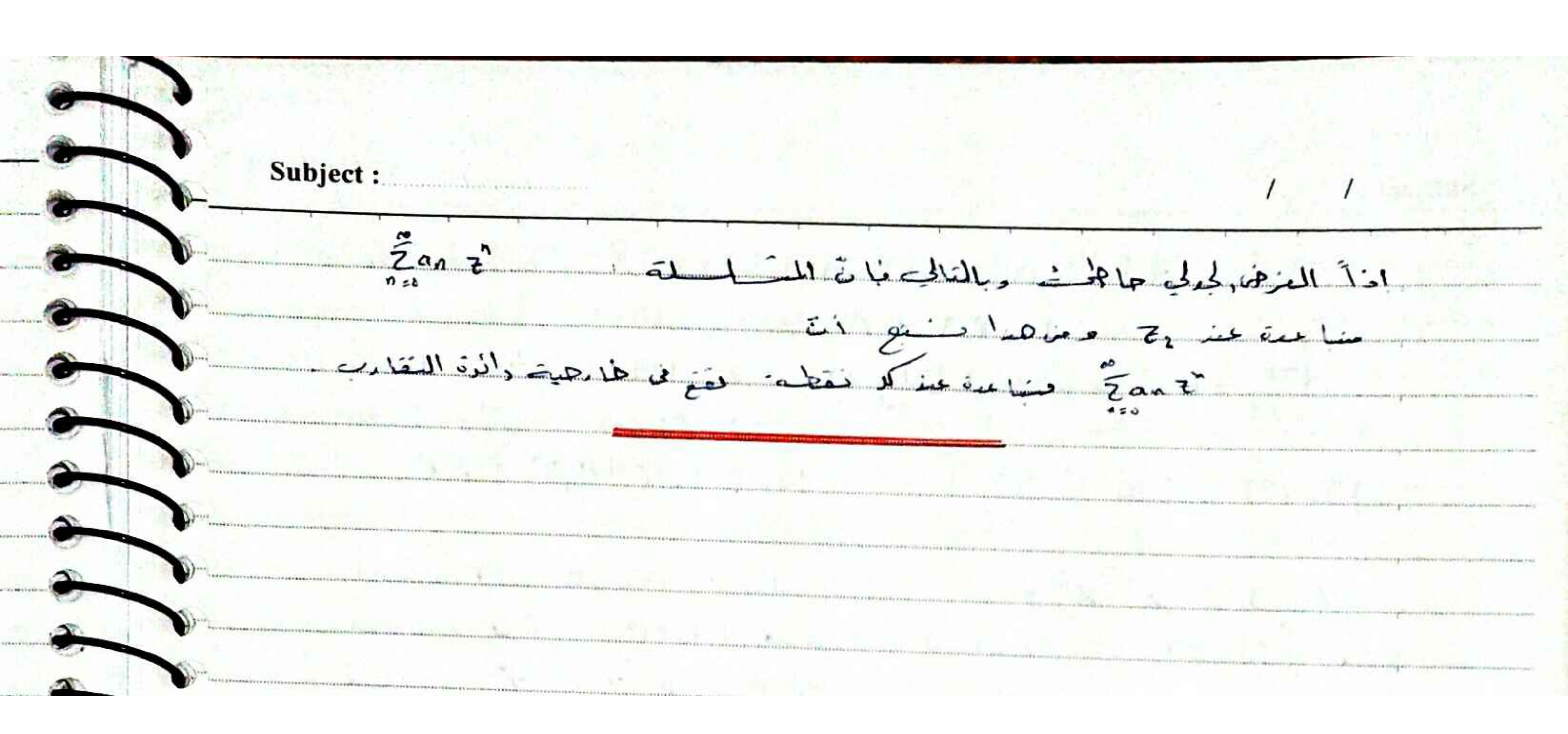
لنفرض أنّ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة ودائرة التقارب لها هي $|z_1| = r$

لنفرض أنّ z_2 نقطة من خارجية الدائرة $|z_1| = r$ "دائرة التقارب"

بحيث أنّ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ تكون متقاربة عند هذه النقطة.

عندئذٍ استناداً إلى المبرهنة السابقة تكون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة عند كل نقطة z تحقق $|z| < |z_2|$ وهذا يناقض الفرض بأنّ دائرة التقارب هي $|z_1| = r$





Subject : ....   /   /

اذاً الفرض الجدلي صحيح وبالتالي فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
متباعدة عند z_1 ومن هذا نستنتج أنّ
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متباعدة عند كل نقطة تقع في خارجية دائرة التقارب.